**<u>הרצאה מספר 8</u>**

סיכם: רון זס

# המשך - עצים דינמים

התחלנו עם עצים דינמים אותם פירקנו למסלולים. עתה נייצג את המסלולים בעזרת עצים:

**<u>מבנה הנתונים - מסלול:</u>** מציאת מחיר מינימלי(צוואר בקבוק) של מסלול שלם.
שינוי מחיר כל הצמתים ב- $\Delta$.

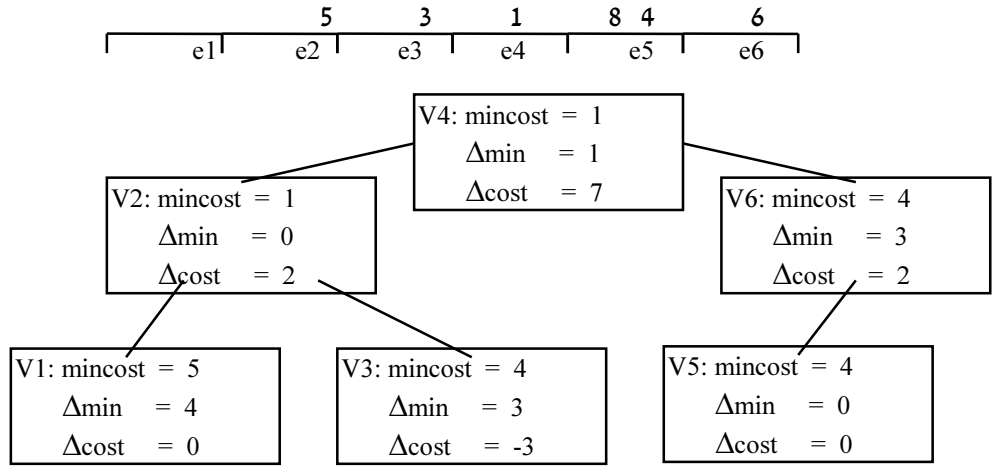
**<u>מימוש א' - בעזרת עצים מאוזנים:</u>**
לצורך מימוש יעיל של מבנה הנתונים, נגדיר את הפונקציות:

$$\Delta\min = \begin{cases} \text{mincost}(x) & x \text{ is Root.} \\ \text{mincost}(x) - \text{mincost}(\text{parent}(x)) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

וכן את הפונקציה:

$$\Delta\text{cost}(v) = \text{cost}(v) - \text{mincost}(v)$$

אותם נשמור עבור כל צומת. (במקום את mincost ו-cost.)
דוגמא:




נקבל:

$$\text{mincost}(v) = \sum_{\text{(on the path from Root to v.)}} \Delta\min .$$

וכן:

$$\text{cost}(v) = \Delta\text{cost}(v) + \text{mincost}(v)$$

לכן זמן חישוב cost(v) הוא כגובה העץ.
שינוי מחיר כל הצמתים במסלול ב-$\Delta$ יתבצע בזמן $O(1)$ ע"י:

$$\Delta\min(\text{root}) \mathrel{+}= \Delta$$

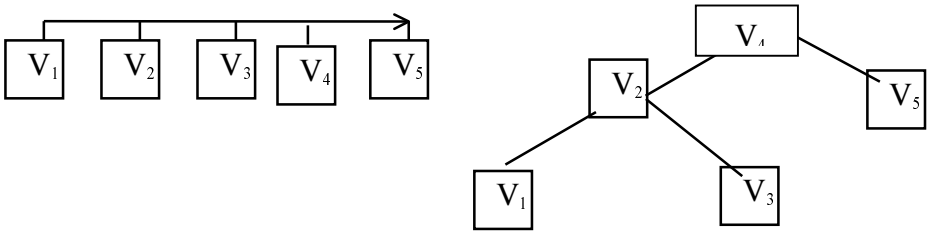
מציאת צוואר בקבוק תסתמך על העובדה כי:
אם ($\Delta$min(v->left)==0) אז צוואר הבקבוק נמצא בתת העץ השמאלי של v.

פעולת ה splay דורשת פיצול (split) ושרשור (join) של שני עצים.
טענה: ניתן לבצע פיצול ושרשור של עצי AVL בזמן $O(h)$, כאשר $h$ הוא גובה העץ.

מסקנה: ניתן לבצע את כל הפעולות על עצים (כולל splay) בזמן $O(h)$, כאשר $h$ הוא גובה העץ.
מסקנה: כיון שנחוצות $O(m)$ פעולות על מסלולים שלמים + $O(m\log n)$ פעולות splay, ניתן למצוא זרימה חוסמת בזמן $O(mh\log n) = O(m\log^2 n)$.

**<u>מימוש ב' - בעזרת עצי splay:</u>**

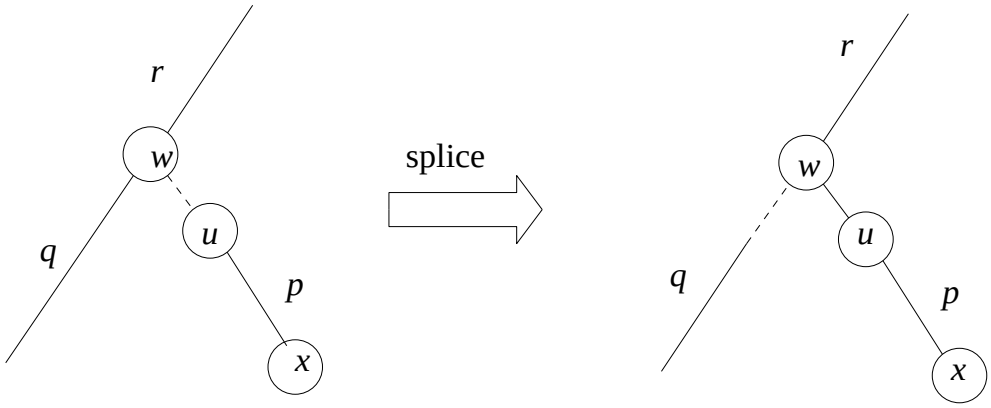
הסידור ב-splay tree הינו משמאל לימין במסלול. (ה-cost לא רלוונטי.) לדוגמא:

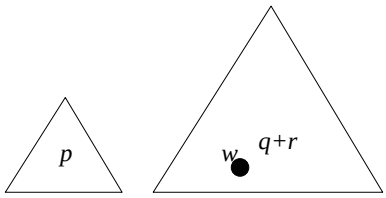


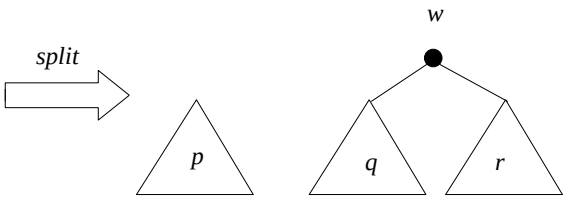

הפעולה expose($x$) הופכת את המסלול מ- $x$ לשורש למסלול שלם. הפעולה עולה מ-$x$ לכיוון השורש תוך כדי ביצוע פעולות splice. בשלב כלשהו, חלק המסלול הכולל את $x$ ייקרא $p$. יהי $u$ הצומת הגבוה ביותר ב-$p$ (הקרוב ביותר לשורש העץ הדינמי). יהי $w$ אביו בעץ הדינמי. $w$ נמצא על מסלול. נבצע splice ב- $w$:

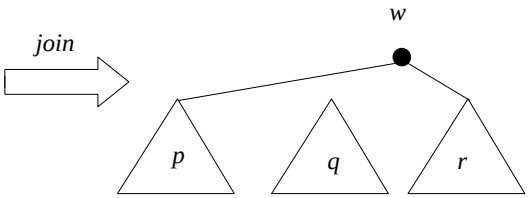
א. בצע $(q,r) = split(w)$ כך ש- $q$ הוא חלק המסלול מתחת ל- $w$ ו- $r$ החלק שמעליו.

ב. בצע $p = join(p,w,r)$ כך שהרחבנו את $p$ לכיוון השורש.






splay(v, $T_2$ : [illegible]

יהיה A תת העץ השמאלי של v.
נתק את A מ-v ושים במקומו את $T_2$.

**<u>לצורך אנליזת המימוש:</u>**

<u>נגדיר - עץ שלם</u>: עץ splay המייצג מסלול שלם.

<u>נגדיר - עץ וירטואלי</u>: יהי T עץ דינמי המיוצג ע״י יער של עצים שלמים $T_1, T_2, T_3, ..., T_n$ . אם $T_i$ מייצג מסלול $\pi_i$ והקצה העליון של המסלול הינו $v_i$ שאביו הוא $w_i$. (לא במסלול) יהי $r_i$ השורש של $T_i$ . נחבר את $r_i$ ל- $w_i$.

<u>דוגמא</u>: העץ הדינמי: ראה קובץ Postscript

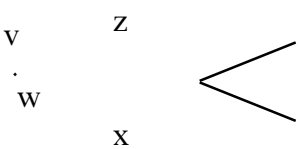
נסמן ב- iw(v) את מספר הצאצאים של v בעץ הוירטואלי.

$$\text{rank(v)} = rank(v) = 1 + \lfloor \log iw(v) \rfloor$$

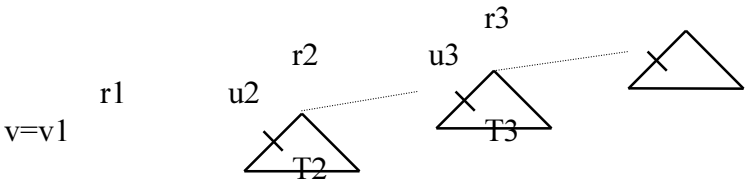
נגדיר את פונקצית הפוטנציאל הבאה:

$$\phi = \sum_{v \in T} \text{rank(v)}$$

נסתכל על הזמן המשוערך של גלגול.
מקרה א: rank(x)<rank(z)



המחיר: $a = rank(root) - rank(v)$




$a_i \leq rank(r_i) - rank(u_i) + c$

$$a(\text{expose}) = \left(\sum_{\text{all needed splays}} a + c\right) = \sum_{\text{all needed splays}} \left(\text{rank}(r_i) - \text{rank}(u_i) + c\right) \le$$

$$\le \text{rank(root)} - \text{rank(v)} + c * (\#\text{splays of the expose}) \le$$

$$\le \text{rank(root)} + c*(\#\text{splays of the expose}) \le$$

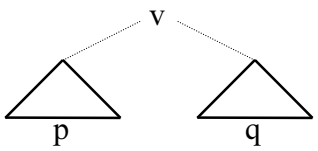
$$\le \log(n) + c*(\#\text{splays of the expose})$$

ע״פ המשפט על עצים דינמיים, m פעולות על עצים דינמים דורשות:
O(m) זמן ו-O(m) פעולות expose.
שמכילות יחד $O(m\log n)$ פעולות splay .
לכן כל הפעולות ידרשו זמן: $O(m\log n)+mc\log n = O(m\log n)$ .

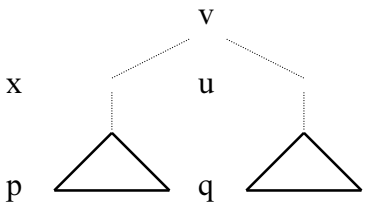
נותר לבדוק את השפעת cut, link המשנות את מבנה העץ הדינמי (ועימו את מבנה העץ הוירטואלי ופונקצית הפוטנציאל.)

<u>פעולת cut</u>: מנתקת קשת שבורה בעץ הדינמי, כלומר קשת וירטואלית בעץ הוירטואלי, ולכן גורמת להקטנת rank של צמתים ⇐ הקטנת φ.

<u>פעולת link (p,v,q)</u>:




לפני ביצוע ה-link נבצע splay(x) כאשר x הינו הימני ביותר ב-p ונבצע splay(u) כאשר u הינו השמאלי ביותר ב-q.




v נמצא בשורש העץ הוירטואלי החדש ורק ב-v העץ גדל, ולכן:

$\Delta\varphi(\text{link}) \le \log(n)$

<u>מסקנה</u>: m פעולות על עצים דינמים ידרשו $O(m\log n)$ זמן.

<u>מסקנה</u>: אלגוריתם דיניץ למציאת זרימה חוסמת ניתן למימוש בזמן $O(m\log n)$ , ולכן ניתן למצוא זרימה מכסימום בזמן $O(nm\log n)$