הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למדעי המחשב
מבני נתונים 2

אלון איתי / ארי פרוינד

6 יולי 1998

חומר פתוח -- 3 שעות . יש 5 שאלות המזכות סה"כ ב- 110 נקודות.

שאלה 1 (15 נק')

יהי T עץ דינמי ששורשו t, $v \in T$ צומת, ו- P המסלול ב- T מ- v ל- t. יהי k מספר קשתות P. להזכירכם, *קשת וירטואלית* היא קשת בעץ הוירטואלי המחברת בין השורש של עץ שלם לאביו בעץ הוירטואלי.

א. מהו המספר המכסימלי של קשתות וירטואליות ב- P ? נמק!

ב. מהו המספר המכסימלי של קשתות וירטואליות ב- P לאחר ביצוע expose v ? נמק!

ג. מה המרחק מ- v לשורש העץ הוירטואלי לאחר ביצוע expose v ? נמק!

שאלה מס' 2 (15 נק')

נכון או לא? (הוכח או הבא דוגמא נגדית) :

א. בערימת פיבונצ'י בת n איברים לא ייתכן שרוך באורך n.

ב. אם בערימת פיבונצ'י נעשה חיבור מידי $\sqrt{n}$ פעולות (insert, meld, decrease), הזמן במקרה הגרוע של פעולה בודדת הוא $O\left(\sqrt{n}\right)$ והזמן המשוערך אינו גדל.

שאלה 3 (30 נקודות)

קבוצת פונקציות H מתחום A ל-$B = \{0,..., p-1\}$ תקרא k אוניברסלית אם לכל $a_1,\ldots,a_k \in A$ שונים ו- $b_1,\ldots,b_k \in B$ כלשהם $|H|/|B|^k$ פונקציות מתוך H מעתיקות את a_1 ל- b_1, ... , a_k ל- b_k. H היא ω – אוניברסלית אם היא k-אוניברסלית לכל k.

א. הראה שאם H היא ω – אוניברסלית אזי היא מכילה את כל הפונקציות מ-A ל-B.

תהי H ω – אוניברסלית ויהיו $A_1,\ldots,A_m \subseteq A$. לכל $h \in H$ נגדיר

$$h(A_i) = \left(\sum_{a \in A_i} h(a)\right) \bmod p .$$

ב. הראה שאם $A_i \neq A_j$ אזי $\Pr\left(h(A_i) = h(A_j)\right) = 1/p$, כאשר h נבחר בהתפלגות אחידה מתוך H.

ג. תן אלגוריתם רנדומלי למימוש הפעולות הבאות על קבוצות

- הוסף איבר ל A_i. זמן $O(1)$.
- בדוק האם $A_i \neq A_j$. זמן ממוצע $O(1)$ כאשר אין שוויון.

שאלה מס׳ 4 (20 נק׳)

בשאלה זו יש לתכנן עץ חיפוש בינרי המאפשר את הפעולות find, insert, delete תחת האילוצים הבאים:

1. כל צמת בעץ הוא רשומה שלה מפתח ושני מצביעים לבנים.
   הרשומה אינה מכילה שדות נוספים.

2. הפעולות find, insert, delete נעשות במעבר אחד מהשורש כלפי מטה.
   פורמלית: עבור כל צומת אליו ניגשים במהלך הפעולה, פרק הזמן העובר מרגע הגישה הראשונה לאחד משדותיו ועד הגישה האחרונה לאחד משדות המצביעים שלו הוא $O(1)$ (אין מניעה שבין הגישות הנ״ל תהיינה גישות לצמתים נוספים). שימו לב שאין דרישה לגבי הגישה האחרונה לשדה המפתח, וזאת על מנת לאפשר ביצוע delete.

3. בנוסף לצמתי העץ מותר להשתמש ב-$O(1)$ זיכרון (כולל הזיכרון בו משתמשים באופן זמני לצורך ביצוע הפעולות).

4. סיבוכיות הזמן המשוערך של כל אחת מהפעולות היא $O(\log n)$, כאשר n הוא מס׳ הצמתים בעץ.

<u>הדרכה</u>: השתמשו בגלגולים של עץ splay.

שאלה מס' 5 (30 נק')

שאלה זו עוסקת בתכנות דינמי. רוצים לחשב את הפונקציה $c(i,j)$ בתחום $1 \le i,j \le n$, נניח שנוסחת הנסיגה של c היא:

$$c(i,j) = 0 \qquad i \ge j$$
$$c(i,j) = w(i,j) + \min_{i<k\le j}\{c(i,k-1) + c(k,j)\} \qquad i < j$$

כאשר $w(i,j)$ מקיימת את שני התנאים הבאים:

1. לכל $i \le i' \le j \le j'$
$$w(i,j) + w(i',j') \le w(i',j) + w(i,j')$$

2. לכל $a \le b \le c \le d$
$$w(b,c) \le w(a,d)$$

<u>למה 1</u>: (ללא הוכחה) בתנאים אלה, $c(i,j) + c(i',j') \le c(i',j) + c(i,j')$ לכל $i \le i' \le j \le j'$.

נגדיר את $k(i,j)$ כאינדקס המקסימלי בו נקבע ערכו של $c(i,j)$, כלומר כאינדקס $i < k \le j$ המקסימלי כך ש- $c(i,j) = w(i,j) + c(i,k-1) + c(k,j)$ (ונגדיר $k(i,i) = i$, לכל i).

א. הוכיחו את הלמה הבאה:
<u>למה 2</u>: $k(i,j) \le k(i,j+1) \le k(i+1,j+1)$, לכל $i \le j$.

נסתכל על הבעיה הבאה:

בנה עץ חיפוש בינרי הממזער את תוחלת מספר ההשוואות בחיפוש המפתח, כאשר

<u>קלט</u>:
n מפתחות שונים $k_1,\ldots,k_n$ עם הסתברויות $p_1,\ldots,p_n$ והסתברויות $q_0,\ldots,q_n$, כאשר p_i היא ההסתברות לחפש את המפתח k_i
ו- q_i היא ההסתברות לחפש מפתח שנמצא בין k_i ל- k_{i+1} (q_0 היא ההסתברות לחפש מפתח שקטן מ- k_1 ; q_n היא ההסתברות לחפש מפתח שגדול מ- k_n).

ב. הראו אלג' תכנון דינמי לפתרון הבעיה שרץ בזמן $O(n^3)$.

ג. הראו אלג' תכנון דינמי לפתרון הבעיה שרץ בזמן $O(n^2)$.

בהצלחה