הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למדעי המחשב
מבני נתונים 2

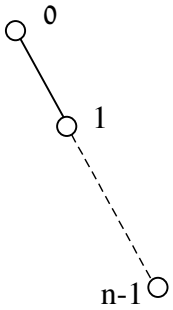
אלון איתי / ארי פרוינד

4 יולי 1997

חומר פתוח -- 3 שעות

שאלה 1 (10 נקודות)

בהינתן עץ splay T להלן:



מהו הזמן הדרוש לביצוע

```
for(i=0; i<n; i++)
            access(i, T)
```

שאלה 2 (10 נקודות)

נניח שבכל קשת (u,v) של עץ דינמי יש, בנוסף לקיבול, ערך נוסף $length(u,v)$. (ערך הקשת נקבע בזמן ה-link.)

יהי $dist(u)$ המרחק בין u לשורש העץ הדינמי. כלומר, אם $u = u_0,\ldots,u_k = root$ אזי $dist(u) = \sum_{i=1}^{k} length(u_{i-1},u_i)$.

כיצד תוסיפו את פעולת *dist* בזמן משוערך $O(\log n)$ מבלי לפגוע בפעולות האחרות.

שאלה 3 (20 נקודות)

עבור $x = [x_0,\ldots x_{n-1}] \in \{0,1\}^n$, נגדיר $p_i([x_0,\ldots,x_{n-1}]) = x_i$.

א. תהי π פרמוטציה על $\{0,\ldots n-1\}$ ו- S_n קבוצת הפרמוטציות על $\{0,\ldots n-1\}$,

$$h_{i,\pi}(x) = p_i([x_{\pi(0)},\ldots,x_{\pi(n-1)}])$$

$$H = \{h_{i,\pi}: \pi \in S_n, i = 0,\ldots n-1\}.$$

האם H היא קבוצת פונקציות ערבול אוניברסלית?

ב. תהי σ פרמוטציה על $0 .. 2^n - 1$,

$$g_{i,\sigma}(x) = p_i(\sigma(x)),$$

$$G = \left\{ g_{i,\sigma} : i = 0, \ldots n-1, g \in S_{2^n} \right\}$$

האם G היא קבוצת פונקציות ערבול אוניברסלית?

שאלה 4 (20 נקודות)

א. תנו מחרוזת $\$ x \in \{0,1\}^n$ כך שגובה עץ הסייפות הדחוס הוא $\leq n$.

ב. כמו א׳ אך בנוסף שינוי אות בודדת ב- x יקטין את הגובה ל - $n/2 \pm 1$.
(פתרון מלא של ב׳ פותר גם את א׳.)

שאלה 5 (20 נקודות)

תכננו מבנה נתונים המכיל מספרים טבעיים, שעליו מוגדרות פעולות: הכנסה, הוצאה, next, min.
בסיבוכיות להלן:

א. כל פעולה בזמן משוערך $(\log\log N)^2$.

ב. בונוס: כנ״ל בזמן משוערך $(\log\log N)(\log\log\log N)$.

כאשר N הוא המספר המכסימלי שהוכנס למבנה עד לרגע ביצוע הפעולה (כולל הפעולה הנוכחית).
הניחו שניתן לבצע פעולות על מספרים בגודל עד N בזמן $O(1)$.

שאלה 6 (25 נקודות)

יהי T עץ שחור-אדום שהתקבל מסדרה של m הכנסות/הוצאות לעץ ריק.
הראו שמספר החלפות הצבעים המשוערך הוא $O(1)$ לכל הכנסה/הוצאה.
(כלומר בסדרה באורך m היו $O(m)$ החלפות צבעים.)

(בכיתה הראו שמס׳ הגלגולים הוא $O(1)$ לכל הכנסה/הוצאה.)

בהצלחה!