מבנה נתונים 2

236312

מבחן סוף סמסטר

7 יולי, 1996

מרצה: א. איתי

מתרגל: זיו מדור

משך המבחן: 3 שעות. חומר פתוח

	מכסימום	
1	20	
2	20	
3	20+10	
4	25	
5	25	
	100	

בהצלחה

שאלה 1 (20 נקודות)

על טרומפלדור ושפילברג לממש מבנה חיפוש (הכנסה, הוצאה, חיפוש, ומינימום) חצי- משמר (אפשר לשאול על העבר, אך לא לשנות אותו).
שניהם בחרו מבנה נתונים בר-חלוף והפכו אותו למבנה משמר ע"י שימוש בצמתים שומרי משקל.
טרומפלדור בחר ב-treap ושפילברג ב-splay tree.
שני המתכנתים התחילו בעץ ריק וביצעו n פעולות הכנסה/הוצאה.

א. תאר בקצרה (≥ 3 שורות) את המימוש של טרומפלדור.
ב. נתח את סיבוכיות המקום הצפויה של טרומפלדור.
ג. תאר בקצרה (≥ 3 שורות) את המימוש של שפילברג.
ד. נתח את סיבוכיות המקום במקרה הגרוע של שפילברג.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהי Σ א"ב סופי. נגדיר מרחק $d:\Sigma\times\Sigma\to N$.

מרחק בין שתי מחרוזות שוות אורך $a=a_1\ldots a_m$ ו-$b=b_1\ldots b_m$ מוגדר כ- $d(a,b)=\sum_{i=1}^{m} d(a_i,b_i)$.
יהי A אוטומט סופי לא דטרמיניסטי (כלומר, מכל צומת וכל $\sigma\in\Sigma$ יכולות לצאת 1,0 או יותר קשתות המסומנות σ).
הנח:

א. לאוטומט מצב תחילי יחיד, q_0, ומצב מקבל יחיד, q_f.
ב. כל הצמתים של הגרף של האוטומט נמצאים על מסלול מכוון מ-q_0 ל-q_f.
ג. כל המסלולים המכוונים מ-q_0 ל-q_f הם בעלי אותו האורך ℓ.

תן אלגוריתם המקבל כקלט אוטומט A ומחרוזת $x=x_1\ldots x_\ell$ ומוצא מלה בשפה של A שמרחקה מ-x מינימלי. סיבוכיות הזמן הנדרשת היא $O(|A|)$, כאשר $|A|$ הוא מספר קשתות הגרף של A.

בונוס (10 נקודות)

קלט כמו קודם, אלא שמחרוזת היא $x=x_1\ldots x_k$ ($k\geq\ell$). עליך למצוא תת-סדרה $x_{i_1}\ldots x_{i_\ell}$ של x ($i_1<i_2<\cdots<i_\ell$, כלומר, תת-הסדרה אינה בהכרח רציפה) שמרחקה ממלה בשפה של האוטומט הוא מינימלי. סיבוכיות הזמן הנדרשת היא $O((k-\ell+1)\cdot|A|)$.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי A קבוצה בת a איברים, ו-B קבוצה בת b איברים, כך ש-b מחלק את a.
$h:A\to B$ היא <u>שוות-פיזור</u> אם לכל $x\in B$ מתקיים $|h^{-1}(x)|=a/b$.
תהי H קבוצת כל הפונקציות שוות-פיזור מ-A ל-B.

א. הוכח $\delta_H(A,A)=|H|\cdot a\cdot(a/b-1)$
ב. הוכח ש-H היא קבוצה אוניברסלית של פונקציות ערבול $(\delta_H(x,y)\leq|H|/b)$.

שאלה 4 (25 נקודות)

עליך להרחיב את ערימות פיבונצ'י כך שתוכל גם לבצע את הפעולה delete-any(r, H) המסלקת r צמתים (לפי רצונך) מהערימה H שיש לה לפחות r צמתים. עליך לבצע פעולה זו בזמן משוערך $O(r)$ מבלי לפגוע בסיבוכיות כל הפעולות שנלמדו לגבי מבנה נתונים זה.

אתה רשאי לשנות את מבנה הנתונים ואת פונקציית הפוטנציאל.

תאר את מימוש הפעולה, נתח את סיבוכיותו, ונמק מדוע סיבוכיות שאר הפעולות אינה נפגעת.

שאלה 5 (25 נקודות)

נסמן ב-$C(q_1,q_2,q_3)$ את העיגול ששפתו עוברת דרך הנקודות q_1,q_2,q_3 במישור.

האלגוריתם הבא מוצא עיגול בעל רדיוס מינימלי המכיל קבוצה $S=\{s_1,\ldots,s_n\}$ של n נקודות במישור, כך שזוג נקודות נתונות p_1,p_2 נמצאות על שפתו. אם אין עיגול כזה, האלגוריתם מחזיר $\varnothing$.

תהי $f_3(q_1,q_2,q_3,T)=1$ אם העיגול שנקבע ע"י q_1,q_2,q_3 מכיל את כל נקודות T. זמן חישוב f_3 הוא $O(|T|)$.

תאור האלגוריתם:

תהי $p_3=s_1$.
עבור $i=2,\ldots,n$:
  אם $s_i \notin C(p_1,p_2,p_3)$
    בדוק אם $f_3(p_1,p_2,s_i,\{s_1,\ldots,s_{i-1}\})=1$
    אם כן: $p_3=s_i$
    אם לא: אין עיגול כזה--עצור והחזר $\varnothing$.

מהו זמן הריצה הצפוי של האלגוריתם, בהנחה ש-S מוינה באופן אקראי?

הנח שהנקודות נמצאות במצב כללי, כלומר, אין אף שלוש נקודות על ישר ואין אף ארבע נקודות על מעגל.