מבנה נתונים 2
236312
מבחן סוף סמסטר

11 יולי, 1994
מרצה: א. איתי

משך המבחן: 72 שעות יש להחתים את זמן קבלת הבחינה כדי לוודא שאינכם חורגים מהזמן.
כמו-כן, יש לתאם את זמן ההחזרה, כדי לוודא שיהיה למי למסור.

את הבחינה יש לפתור **לבד** מבלי להשתמש בספרים או במאמרים פרט לאלה שאושרו במפורש.

תצטרכו לחתום על ההצהרה הבאה

אני מצהיר/ה בזה שלא נעזרתי באף אדם ובשום חומר מודפס, פרט ל-

Corman Leiserson and Rivest

ולראיה באתי על החתום _____

יום _____ יולי 1994 שעה _____

זכרו, הציון הוא יחסי, כך ששיתוף פעולה עלול לגרום להורדת ציונכם!

את התשובות יש לכתוב בצורה תמציתית ומסודרת. רצוי להדפיס.
כל שאלה על עמוד נפרד, ולסדר את השאלות בסדר עולה.

בהצלחה

Fortune

Fifth Law of Applied Terror:
If you are given an open-book exam, you will forget your book.
Corollary:
If you are given a take-home exam, you will forget where you live.

שאלה 1

תהי H קבוצה כלשהי של פונקציות מקבוצה K לתוך $\{0,...,m-1\}$.
הראו שקיימים $x \neq y \in K$ כך ש-

$$\frac{\left|\{h\in H : h(x) = h(y)\}\right|}{|H|} > \frac{1}{m} - \frac{1}{|K|}$$

שאלה 2

נסתכל על סכימת ההכנסה הבאה לעץ חיפוש טרנרי. כל הרשומות יישבו בעלים, ובכל עלה יהיו רשומה אחת או שתיים. אם יש צורך להוסיף רשומה שלישית לעלה, נפצל את העלה לשלושה בנים.

נכניס n רשומות לעץ ריק בסדר אקראי.
מה המספר הצפוי של עלים בעלי רשומה אחת כפונקציה של מספר ההכנסות n?

שאלה 3 תכנות ליניארי דו-ממדי

תאור הבעיה: נתונים אי-שוויונות $h_i: \ a_ix + b_iy \geq c_i \qquad (i=1,...n)$

מצא נקודה (x_n,y_n) המקיימת את כל האי-שוויונות ובעלת y מינימלי.

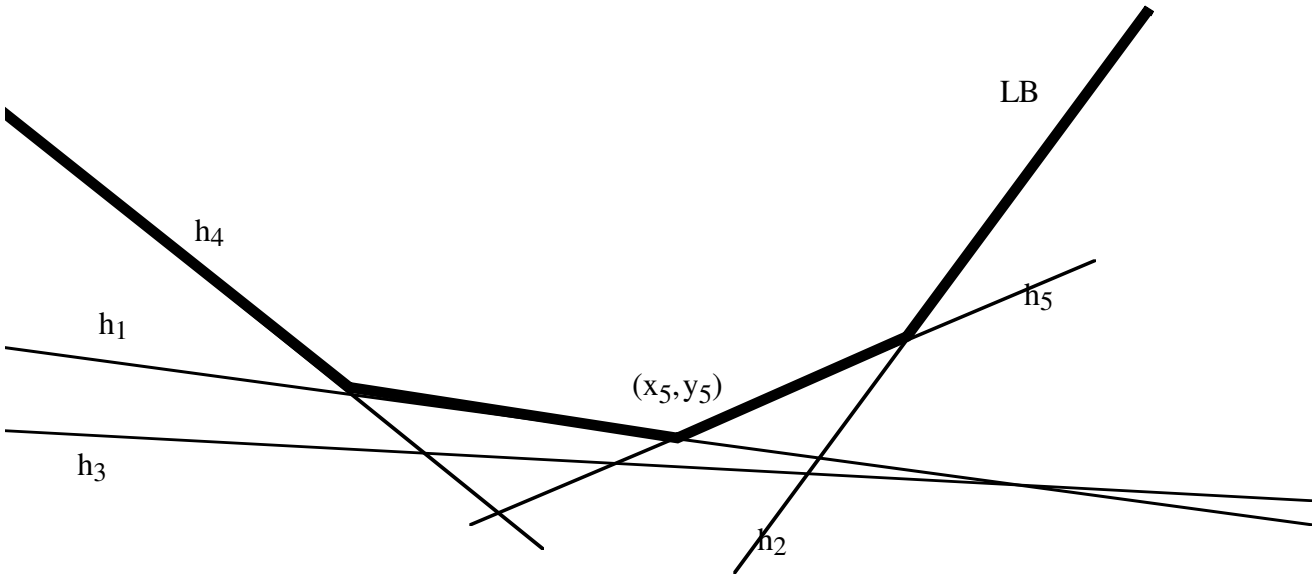
אינטרפרטציה גיאומטרית: כל אי שויון מגדיר חצי-מישור (החלק שמעל לישר שמוגדר ע"י האי-שוויון). המטרה למצוא נקודה הנמוכה ביותר ששייכת לחיתוך כל חצאי המישור.

מטרה: למצוא אלג' רנדומאלי שזמן הריצה הצפוי שלו הוא ליניארי.

יהי $S_i=\{h_1,...,h_i\}$ ו- (x_i,y_i) פתרון אופטימלי של S_i.

האלגוריתם עובד באופן איטרטיבי, בשלב ה-i נוסיף את חצי המישור h_i. כמו כן, נשמור את LB, הגבול התחתון של האיזור הפיזיבילי, ממוין משמאל לימין.

דוגמא:



$LB = (h_4,h_1,h_5,h_2)$ בסדר זה (h_3 לא שייך ל-LB).

אם בשלב ה-i h_i נמצא מתחת ל-(x_{i-1},y_{i-1}) נתעלם ממנו, כלומר, $(x_i,y_i) = (x_{i-1},y_{i-1})$, ו-LB נשאר ללא שינוי. אחרת, האופטימום החדש, (x_i,y_i), נמצא בחיתוך של h_i עם LB. ועל-כן צריך לעדכן את LB ולמצוא את (x_i,y_i).

הראו:
א. הבדיקה אם h_i נמצא מתחת ל-(x_{i-1},y_{i-1}) דורשת זמן $O(1)$.
ב. עדכון LB (אם הוא משתנה) דורש זמן $O(i)$.
ג. אם האי-שוויונות באו בסדר אקראי, ההסתברות ש-LB משתנה הוא $2/i$.
ד. תכננו אלגוריתם שזמן הריצה הצפוי שלו הוא ליניארי.

(ברור שהקושי העיקרי נמצא ב-ג'.)

שאלה 4
בעיית ה-Union Find מוכרת ממבני נתונים 1.
נתונות קבוצות זרות חלקיות ל-$\{1,...,n\}$. ויש לבצע שתי פעולות:
Union(A,B) אחד את הקבוצות A,B, לקבוצה החדשה נקרא A, הקבוצות הישנות נהרסות.
Find(x) מצא לאיזו קבוצה משתייך x.

האלגוריתם היעיל מחזיק את הנתונים ב-up tree (כל צומת מחזיק מחוון לאביו), ושם הקבוצה מופיע בשורש.
בזמן ה-Union מאחדים שני עצים, ובזמן ה-find מטפסים מהצומת x לשורש.

האלגוריתם משתמש בשתי היורוסטיקות:
א. בזמן ה-Union הוסף את הקבוצה הקטנה לגדולה;
ב. בזמן ה-find כווץ את המסלול – תן לכל צמתי המסלול להצביע לשורש.

Tarjan הראה שכאשר משתמשים בשתי היורוסטיקות הזמן המשוערך של find הוא $O(\alpha(m,n))$.

הראו:
אם נשתמש **רק** בהיורוסטיקה השניה, אזי הזמן המשוערך של find הוא $O(\log n)$.

שאלה 5 pattern domination
יהיו a[1..n], b[1..m] מערכים. נאמר ש-a שולט על b אם קיים אינדכס i כך ש-

$$a[i+j] \geq b[j] \qquad (j=1,...,m)$$

כיצד תבדקו אם a שולט על b בזמן $O(m+n)$?

שאלה 6
נתונה רשת של רכיבים $r_1,...,r_n$ המחוברים בטור.
לרכיב ה-i יש הסתברות p_i להתקלקל.
ניתן לבדוק רק את הפלט של כל אחד מהרכיבים. אם הפלט של רכיב r_i לא תקין, אזי אחד הרכיבים $r_1,...,r_i$ מקולקל. אם הפלט תקין, אזי כל הרכיבים האלו תקינים.

עץ בדיקות הוא עץ חיפוש בינארי, שבו הרכיבים $r_1,...,r_n$ מסודרים בסדר in-order . בכל צומת בודקים את הפלט של הרכיב שנמצא בצומת, וממשיכים שמאלה אם הפלט לא תקין וימינה אם הוא תקין. עלי העץ יצביעו על רכיבים.

עץ אופטימלי הוא עץ בדיקות כך שאם מבצעים את הבדיקות ע"פ העץ אזי מספר הבדיקות הצפוי הוא מינימלי.

כיצד תמצאו עץ בדיקות אופטימלי?
אפשר לבצע זאת בזמן $O(n^2)$ (בונוס) אך אנו נסתפק באלגוריתם הפועל בזמן $O(n^3)$.

שאלה 7
מטרת השאלה היא לבצע fractional cascading באופן חצי-דינמי (רק הכנסות), כך שכל הכנסה תיקח זמן משוערך לוגריתמי.

יהי T עץ בינרי עם שורש r.
בכל צמת v בעץ נחזיק קטלוג C_v של איברים, המתוחזקים בעץ בינרי מאוזן, (בה"כ נניח שלכל שני צמתים u,v, קבוצות המפתחות C_v ו-C_u זרים).
לכל קשת uv של העץ, נחזיק מבנה עזר A_{uv} שמחזיק את כל מפתחות האבא C_u ונציגים של מפתחות $A_{vw} \cup C_v$. את A_{uv} נחזיק כרשימה ממוינת ובנוסף, כל איבר של A_{uv} יכיל מחוון דו-כיווני לאיבר המתאים ב-C_v או ב-C_u.
גשר מורכב משני נציגים עוקבים x,y של C_v וכל המפתחות שנמצאים בין x ל-y ב-C_v וב-A_{uv}.
יהי $k>6$. המבנה הוא k-תקין אם לכל קשת uv מתקיים שבכל גשר לכל היותר k איברים.

א. יהי m מסלול בעץ T , k-תקין . חיפוש מפתח x במסלול m פרושו למצוא את המפתח העוקב ל-x בכל אחד מצמתי m. כיצד תבצעו חיפוש בזמן $O(m + \log n)$ (n הוא המספר הכולל של מפתחות ב-T)?

ב. כיצד תוסיפו מפתח x לצומת v בעץ בזמן משוערך $O(\log n)$?