חסם תחתון למיון בדיסק

Alok Aggarwal and Jeffrey Scott Vitter,
The Input/Output Complexity of Sorting and Related Problems,
Communications of the ACM, 31:1116-1127, 1988.

הבעיה: מהו מספר פעולות פלט/ קלט הדרוש למיין קובץ בן N רשומות, הנמצא על דיסק ומאורגן בבלוקים, כך שכל בלוק מכיל B רשומות.

Floyd (1972) הראה חסם עליון ותחתון של $N \log N/B$ פעולות I/O

המודל:

קלט בן N רשומות $(X_1,\ldots,X_N)$,

זיכרון ראשי בן M רשומות,

בלוקים (סקטורים) בני B רשומות.

זיכרון מורחב $R_1,\ldots,R_M,R_{M+1},\ldots$.

פנימי: $R_1,\ldots,R_M$;

דיסק: $R_{M+1},\ldots$;

בהתחלה:

מקומות $R_1,\ldots,R_M$ ריקים,

מקומות $R_{M+1},\ldots,R_{M+N}$ מכילים את הקלט.

קלט / פלט

הבלוק ה- j הוא קבוצת המקומות $R_{M+(j-1)B+1},\ldots,R_{M+jB}$.

קריאת הבלוק ה- j:

העתקת B רשומות ממקום $R_{M+jB+1},\ldots,R_{M+(j+1)B}$

ל- B מקומות ריקים מתוך $R_1,\ldots,R_M$.

פעולת כתיבה היא העתקה בכיוון ההפוך.

הגדרה : יצירת פרמוטציה :

עבור פרמוטציה π של $1..N$

סדר את הדיסק כך ש - $(R_{M+1},\ldots,R_{M+N})=(X_{\pi(1)},\ldots,X_{\pi(N)})$.

משפט

קיימת פרמוטציה π כך ש- $T=\Omega\left(\min\left\{\frac{N\log(N/B)}{B\log(M/B)},N\right\}\right)$ פעולות קלט/פלט דרושות כדי ליצור אותה.

מסקנה:

מיון N רשומות דורש זמן $T=\Omega\left(\min\left\{\frac{N\ln N/B}{B\ln M/B},N\right\}\right)$

חקר הנוסחה:

מתי מתקיים כל חלק של המינימום?

$$\frac{N \ln N / B}{B \ln M / B} < N$$

$$\ln N / B < B \ln M / B$$

$$N / B < (M / B)^B$$

היחידות B ו- M נמדדות ברשומות

עבור רשומות גדולות, שממלאות בלוק שלם $B = 1$,
קרוב לוודאי שהאי-שוויון לא מתקיים.
אבל, לרשומות בגודל 1KB, בלוק של 5KB, זיכרון של 1MB:

$B = 5$ $M \cong 1{,}000$ האי-שוויון מתקיים עבור $N \leq 5 \cdot (1000/5)^5 = 1.6 \cdot 10^{12}$.

ברור שניתן ליצור פרמוטציה בזמן $O(N)$.

הגדרה: פעולה פשוטה
פעולת קלט/פלט תקרא *פשוטה* אם בפעולה כל הרשומות נמחקות ממקומן הישן.

למה: לכל אלגוריתם A ליצירת פרמוטציות,
קיים אלגוריתם A^S היוצר אותן פרמוטציות,
משתמש רק בפעולות קלט/פלט פשוטות, ולא דורש יותר פעולות.

הוכחת המשפט:
נניח שהאלגוריתם משתמש רק בפעולות פשוטות –
כל רשומה מופיעה רק פעם אחת בזיכרון המורחב.

יהי P_t מספר הפרמוטציות שניתן ליצור תוך t פעולות קלט/פלט.
$P_0 = 1$.

$P_1 = (B!)N/B$:
בצעד הראשון ניתן לקרוא אחד מ- N/B הבלוקים ולהעביר אותו לזיכרון הראשי,
ואת הרשומות שבו לסדר ב-$B!$ דרכים.

<u>הצעד ה-t</u>:

<u>פלט</u>: ניתן לכתוב על בלוק ריק.
יש לכל היותר $t+(N/B)$ בלוקים לא ריקים.
בפעולת כתיבה, נבחר $b \le B$ רשומות מהזיכרון הראשי ומבלי שנשנה את הסדר ביניהן נעביר אותן לאחד הבלוקים הריקים.

מספר הדרכים לבחור את הרשומות הוא $\sum_{b=1}^{B}\binom{M}{b} \le 2\binom{M}{B} = O\left(\frac{M^B}{B!}\right)$.

כיון ש- $t = O(N\log N)$:

$$P_t \le \left(C\cdot\left(M^B/B!\right)\cdot N\log N\right)\cdot P_{t-1}.$$

קלט: נעביר בלוק בן $\geq B$רשומות מהדיסק לזיכרון ראשי, כלומר נגדיל את מספר הפרמוטציות בפקטור של $C \cdot N \log N$

$$P_t \leq B!C \cdot \left(M^B / B!\right) \cdot N \log N \cdot P_{t-1}$$

בפעם הראשונה שקוראים בלוק (בגודל B) נסדר את הרשומות ע״פ הפרמוטציה π, ניתן לעשות זאת ב- $B!$ דרכים.

כדי לא לספור את אותה הפרמוטציה יותר מפעם אחת, נניח שבזיכרון הראשי האיברים מסודרים ע״פ הפרמוטציה π.

על-כן הגורם $B!$ יכול להופיע לכל היותר $\frac{N}{B}$ פעמים במהלך האלגוריתם.

$$P_t \leq (B!)^{\frac{N}{B}} \left(C \cdot \left(M^B / B!\right) \cdot N \log N\right)^t$$

יהי T הערך המינימלי שעבורו ניתן ליצור את כל הפרמוטציות, כלומר,

$$(B!)^{\frac{N}{B}}\left(C\cdot\left(M^{B}/B!\right)\cdot N\log N\right)^{T}\geq N!$$

נפתור:

$$T=\Omega\left(\min\left\{\frac{N\ln N/B}{B\ln M/B},N\right\}\right)$$

משי"ל

שיפור החסם התחתון למיון

כיון שמיון הוא מקרה פרטי של יצירת פרמוטציה, החסם התחתון

$T = \Omega\left(\min\left\{\frac{N \ln N / B}{B \ln M / B}, N\right\}\right)$ תקף.

ניתן לשפר זאת ל- $T = \Omega\left(\frac{N \ln N / B}{B \ln M / B}\right)$

כאשר $B \log(M / B) = o(\log(N / B))$

בצעד ה- t:
אם קראנו בלוק שנכתב בצעד קודם, אז לפי ההנחה הסדר בין הרשומות של הבלוק הוא הסדר הסופי.

מכאן שיריב יכול לבחור פרמוטציה שקונסיסטנטית עם התוצאות עד כה ב- $\binom{M}{B}$ דרכים. מכאן $P_{t+1} = \binom{M}{B} P_t$

אם קראנו בלוק חדש, ניתן לסדר את הרשומות ב- $B!$ דרכים, ולחלק אותם בין M הרשומות בזיכרון ב- $\binom{M}{B}$ דרכים.

במקרה זה $P_{t+1} = (B!)\binom{M}{B} P_t$.

מקרה זה יקרה לכל היותר N/B פעמים.

ניתן להמשיך בכך כל עוד $(B!)^{N/B}\binom{M}{B}^{T} \le N!$

מכאן נקבל את החסם התחתון.

מיון ב- $O\left(\frac{N\ln N/B}{B\ln M/B}\right)$ פעולות I/O.

MergeSort:

<u>יצירת מעלות התחלתיים:</u>

נחלק את הקלט לקבוצות של M/B בלוקים.
נקרא קבוצה לזיכרון ראשי, נמיין אותה ונכתוב על הדיסק.
נקבל N/M מעלות התחלתיים.
זמן: מעבר אחד על הקובץ.

שלב המיזוג:

נבצע מיזוג מדרגה M/B - 1

מספר מעברי המיזוג: $\log_{(M/B)-1} N/M = \theta\left(\frac{\log N/M}{\log M/B}\right) = \theta\left(\frac{\log N/B}{\log M/B}\right)$

השוויון האחרון נובע מכך ש-

$$\frac{\log N/M}{\log M/B} = \frac{\log\left(\left(N/B\right)\left(B/M\right)\right)}{\log M/B} = \frac{\log\left(N/B\right) + \log\left(B/M\right)}{\log M/B}$$
$$= \frac{\log\left(N/B\right) - \log\left(M/B\right)}{\log M/B} = \frac{\log\left(N/B\right)}{\log M/B} - 1$$

כל מעבר דורש N/B קריאות וכתיבות.

לכן סה"כ פעולות I/O

$$\theta\left(\frac{N}{B}\frac{\log N/B}{\log M/B}\right)$$

פעולות במקביל

נניח שבכל I/O ניתן לקרוא עד P בלוקים במקביל.

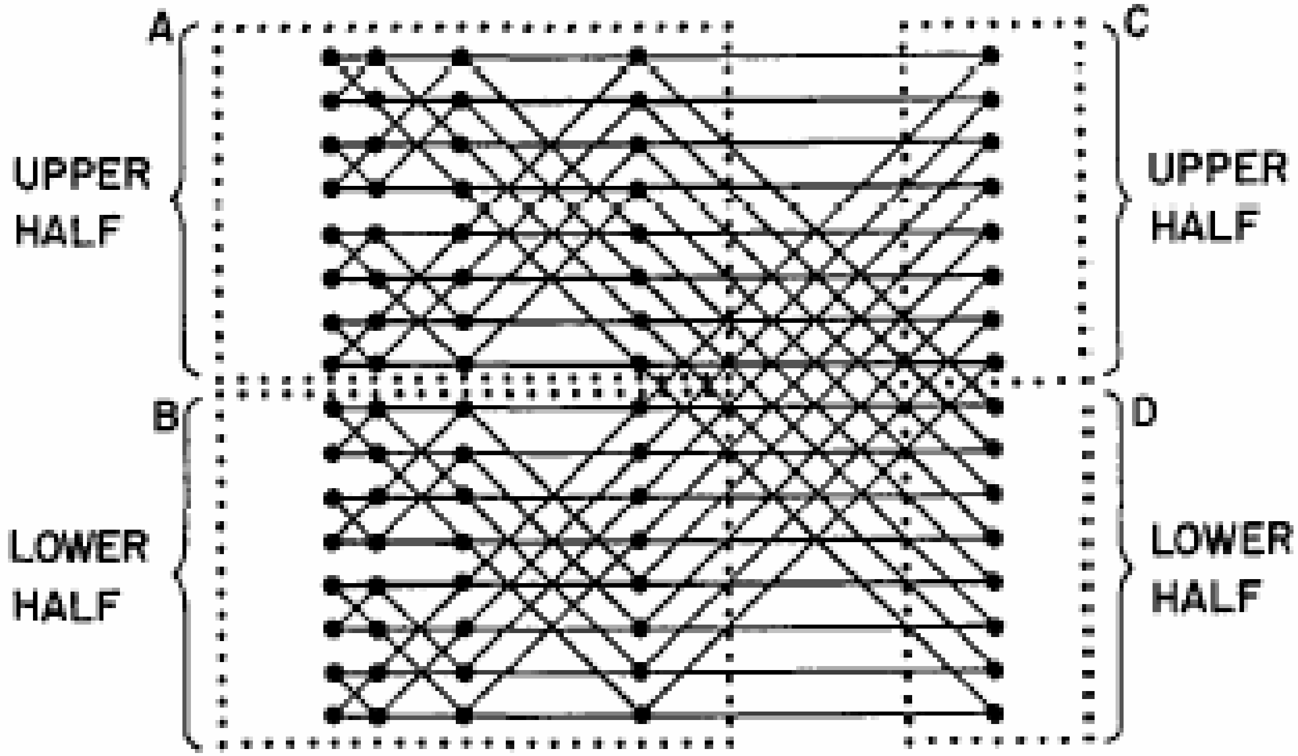
החסם התחתון יקטן בפקטור של P:

$$T = \Omega\left(\min\left\{\frac{N \ln N/B}{PB \ln M/B}, \frac{N}{P}\right\}\right)$$

מה קורה לחסם התחתון כאשר $P > 1$?

עבור $P > 1$ צריך לקרוא בבת אחת P בלוקים. כיצד נדע אילו בלוקים לקרוא?

FFT – Fast Fourier Transform



רשת פרמוטציות Permutation Network

רשת בעלת $J+1$ עמודות. בכל עמודה N צמתים.
כל הקשתות בין עמודה לעמודה הבאה.

יש קשת בין $n_{i,j-1}$ ל- $n_{i,j}$

תתכן קשת אחת נוספת ל- $n_{i,j}$:

אם יש קשת $\left(n_{i',j-1}, n_{i,j}\right)$ אז גם $\left(n_{i,j-1}, n_{i',j}\right)$ קיימת .

הרשת <u>יוצרת פרמוטציה π</u> אם ניתן לבחור תת-קבוצה של קשתות, כך שלכל צומת נכנסת קשת אחת ויוצאת קשת אחת,
ויש מסלול מצומת $x_{i,0}$ לצומת $x_{\pi(i),J}$

הגרף היא <u>רשת פרמוטציות</u> אם לכל פרמוטציה קיימת תת קבוצה כנ״ל.

מימוש רשת פרמוטציות:

נשים אסימונים על צמתי הקלט.

נוכל לשים אסימון על צומת אם:

הצומת והאבות שלו נמצאים בזיכרון ויש אסימונים כל האבות.

מטרה: לשים אסימונים על כל הצמתים.

אפשר לקבל רשת פרמוטציות משרשור שלוש רשתות FFT

מסקנה: חסם תחתון לרשת פרמוטציה יהווה חסם תחתון (עד כדי קבוע) לרשת FFT.

יש לשים לב שכאן הפעולות לא תלויות בקלט.

לכן, בכל שלב P_t יגדל בפקטור של $\binom{M}{B}(B!)$ (N/B פעמים) (אין פקטור $(N/B+t)$)

או בפקטור $\binom{M}{B}$. נחפש T מינימלי עבורו $N! \le \binom{M}{B}^T (B!)^{N/B}$.